Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике
обучающегося 10А **класса**
муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения
МБОУ СОШ №7
Предгорного муниципального района
Топузовой Элины
Константиновны
ФИО

Учитель математики**:**
Кудинова Ольга
Юрьевна **ФИО**

Дата: 30 ноября 2020г.

Ставропольский край

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

2020/21 учебного года

Математика

10 класс

1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + 2a - 5 = 0$ будет минимальной.

2. Чему равна площадь вписанной в окружность трапеции, если диагональ этой трапеции равна 2, а из центра окружности боковая сторона трапеции видна под углом 60°?

3. На доске записаны натуральные числа, которые образуют арифметическую прогрессию. Оказалось, что сумма нечетных чисел равна 33, а сумма четных чисел равна 44. Найти первый и последний члены этой прогрессии, а также их количество, если известно, что эта прогрессия начинается с четного числа и содержит более двух членов.

4. Петя и Саша играют в интересную игру: Петя называет натуральное число от 2 до 9, Саша тоже называет натуральное число от 2 до 9 и умножает его на число, названное Петей. Затем Петя опять называет число от 2 до 9 и умножат его на произведение, получившееся у Саши. Затем, так же поступает Саша и так далее. Выигрывает тот, у кого произведение впервые станет больше чем 2020. Кто из мальчиков может всегда выиграть и как?

5. Функция определена при всех действительных значениях x и удовлетворяет условию $f(x) + xf(1-x) = 1$ при всех x. Найдите сумму всех действительных решений уравнения $2020f(x) + 1 = 0$.

Задание 3.
Если это - прогрессия натуральных чисел, и начинается она с четного числа, то это число - минимум 2.
Если прибавлять ~~2~~1 к каждому последующему члену, то:

6 12 20 30 42 56

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 - не подходит,

тогда начнем с 4:

10 18 28 40 54

4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 - не подходит, и если дальше убирать по одному четному числу из начала прогрессии, то сумма четных станет только больше.
Если прибавлять 2 к каждому члену, начиная с четного, то получится прогрессия четных чисел, а в условии есть и нечетные => не подходит.

Если прибавлять 3, начиная с 2:

10 24 44

2 5 8 11 14 17 20. Сумма четных соответствует

16 33

условию. При проверке: и сумма нечетных соответствует условию.

Таким образом, первый член – 2, последний – 20; количество членов – 7.

Формула: $a_{n+1} = a_n + 3$

Задание 4.

Предположим, что и Петя, и Саша называют наибольшее натуральное число из возможных, тогда:

П: 9 С: $9 \cdot 9 = 81$ Выиграет Саша, но это

$81 \cdot 9 = 729$ $729 \cdot 9 = 6561$ единичный случай.

Если Петя будет называть наименьшее, а Саша наибольшее:

П: 2 С: $2 \cdot 9 = 18$ Выиграет Саша, но это

$18 \cdot 2 = 36$ $36 \cdot 9 = 324$ тоже не является правилом

$324 \cdot 2 = 648$ $648 \cdot 9 = 5832$ или стратегией одного из них.

Из этого примера мы видим: если Петя, даже называл в начале игры наименьшие числа, на одном из этапов назовет большое число, чтобы сумма была больше 2020, то он выиграет, независимо от того, какие числа были названы Сашей.

Таким образом, Петя может начать с минимальных чисел, при этом он должен следить, чтобы его произведение, умноженное на 9, не было больше 2020. А дальше, назвав нужное число и добившись произведение больше 2020, он выигрывает. При этом Пете нельзя играть ~~за~~ только наибольшим числом, потому что, если Саша сделает так же, то Петя проиграет.

Пример-подтверждение схемы:

П: 2 С: $2 \cdot 9 = 18$ Выигрывает Петя.

$18 \cdot 2 = 36$ $36 \cdot 9 = 324$

$324 \cdot 9 = 2916$

Задание 1.

При $a = 0,5$: $x^2+0,5x+1-5=0$; $x^2+0,5x-4=0$

$D=0,25-4(-4)=0,25+16=16,25$; $\sqrt{D}=0,5\sqrt{65}$

$x_1=\frac{-0,5-0,5\sqrt{65}}{2}=\frac{-0,5(1+\sqrt{65})}{2}$

$x_2=\frac{-0,5+0,5\sqrt{65}}{2}=\frac{-0,5(1-\sqrt{65})}{2}$

$x_1^2+x_2^2=\frac{0,25(1+2\sqrt{65}+65)+0,25(1-2\sqrt{65}+65)}{4}=$

$=\frac{0,25(1+\cancel{2\sqrt{65}}+65+1-\cancel{2\sqrt{65}}+65)}{4}=\frac{0,25\cdot 132}{4}=\frac{33}{4}=8,25$

При $a=1$: $x^2+x+2-5=0$; $x^2+x-3=0$

$D=1-4\cdot(-3)=13$; $\sqrt{D}=\sqrt{13}$; $x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}=\frac{-1(1+\sqrt{13})}{2}$

$x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}=\frac{-1(1-\sqrt{13})}{2}$; $x_1^2+x_2^2=\frac{1(1+\cancel{2\sqrt{13}}+13)+1(1-\cancel{2\sqrt{13}}+13)}{4}=$

$=\frac{28}{4}=7$

При $a=2$: $x^2+2x+4-5=0$; $x^2+2x-1=0$

$D=4-4(-1)=4+4=8$; $\sqrt{D}=2\sqrt{2}$; $x_1=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=\frac{-2(1+\sqrt{2})}{2}=-1(1+\sqrt{2})$

$x_2=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=\frac{-2(1-\sqrt{2})}{2}=-1(1-\sqrt{2})$; $x_1^2+x_2^2=1+\cancel{2\sqrt{2}}+2+1-\cancel{2\sqrt{2}}+2=6$

При $a=2,5$: $x^2+2,5x+5-5=0$; $x^2+2,5x=0$; $x(x+2,5)=0$

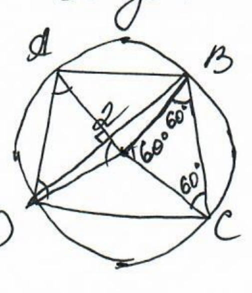
$x_1=0$; $x_2=-2,5$; $x_1^2+x_2^2=0+6,25=6,25$

При $a=3$: $x^2+3x+1=0$; $D=9-4\cdot 1=5$; $\sqrt{D}=\sqrt{5}$

$x_1=\frac{-1(3+\sqrt{5})}{2}$; $x_2=\frac{-1(3-\sqrt{5})}{2}$; $x_1^2+x_2^2=\frac{9+6\sqrt{5}+5+9-6\sqrt{5}+5}{4}=\frac{28}{4}=7$

=> сумма квадратов корней уравнения будет минимальной при $a=2$.

Задание 2.



1) В окружность можно вписать только равнобед. трапецию, потому что у нее сумма противоп. углов = 180°