

Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике
обучающегося 11 класса
муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения
Средняя общеобразовательная школа №10 "
Предгорного муниципального района
Ставропольского края
Плаховой Владиславы Владимировны
ФИО

Учитель математики:
Плахова Е. В.
ФИО

Дата: 30.11.2020г.

Задача 1.

1. Построим таблицу, т.к. в задаче даны 3 измерения, то и таблица будет 3 и плюс 1 (обобщающая).

2. Таблица 1. „Дом“.

	анимитанин	норвежцу	испанцу
красный	+	—	—
желтый	—	+	—
белый	—	—	+



По условию мы понимаем, что крайний справа — белого цвета, значит осталось определить 2 дома. Сразу можно обозначить, что в красном доме живет анимитанин, потому что все остальные не живут там. Так норвежцу живет в доме слева, и этот дом уже не красного цвета, а дом справа белого цвета, то ему остается только желтый. А испанцу остается только белый дом.

3. Таблица 2. „Цветы“.

	анимитанин	норвежцу	испанцу
ландыши	—	—	+
сирень	+	—	—
крокусы	—	+	—

Теперь, зная цвет дома, определим увяток. Первое, что точно можно отметить по условию, это, что в желтом доме растут крокусы, а там живет норвежцу. Далее строим следующую таблицу.

4. Таблица 3. „Напиток“.

	анимитанин	норвежцу	испанцу
сок	—	—	+
вода	—	+	—
молоко	+	—	—

По условию, молоко пьют в среднем доме, а мы выяснили, что средний дом красного цвета и там живет анимитанин, значит уже норвежцу не пьет молоко. Так как, по условию, кто выращивает ландыши, тот пьет сок, из этого вытекает, что сок пьет испанцу, ведь норвежцу выращивает крокусы. И вот мы пришли к выводу, что норвежцу пьет воду, что испанцу выращивает ландыши, а анимитанин, таким образом, выращивает сирень.

Платовой Анастасии

муниципальное бюджетное
общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 10»
Предгорного муниципального района
Ставропольского края

продолжение задачи 1.

4) Обобщающая таблица.

	актинидии	норвегеу	испанеу
дом	красный	желтый	белый
цветок	сирень	крокус	ландыш
напиток	молоко	вода	сок.

Ответ: норвегеу пьет воду.

Задача 2.

Так как число 2021 оканчивается на 1, а известно, что в какую бы степень не поставит натуральное число, оканчивающееся на 1, последняя цифра точно 1. Так же при n^{n-1} наблюдается закономерность, что последними 2 цифрами стоят 0 и 1. Так можно прийти к выводу, что

$$2021^{2020} = \dots 01$$

Ответ: две последние цифры это 0 и 1.

Задача 3.

Уравнение имеет корни, если $D > 0$

$$x^2 - ax + a + 1 = 0$$

$$a = 1, b = -a, c = a + 1.$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a + 1) = a^2 - 4a - 4.$$

$$\text{Далее } a^2 - 4a - 4 \geq 0.$$

$$a^2 - 4a - 4 = 0.$$

$$a_1 = 1, k = -2, c = -4.$$

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$D_1 = (-2)^2 - 1 \cdot (-4) = 8, D_1 > 0, \sqrt{D_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$a = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a_1}$$

$$a_1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$a_2 = 2 + 2\sqrt{2}.$$

значит уравнение имеет 2 корня для любого значения a .

Продолжение задачи 3.

По теореме Виета

$$x_1 \cdot x_2 = a+1$$

$$x_1 + x_2 = a.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_2) =$$

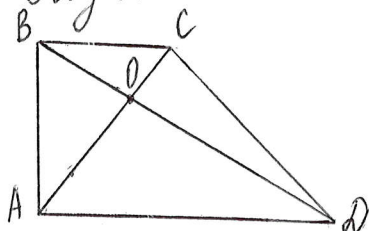
$$= a(a^2 - 3(a+1)) = a(a^2 - 3a - 3) = a((a-1,5)^2 - \frac{3}{4}).$$

При $a=1$, сумма кубов корней будет наименьшей.

$$S_{\text{наим.}} = 1((1, -1,5)^2 - 0,75) = 0,25 - 0,75 = -0,5.$$

Ответ: при $a=1$ сумма кубов корней уравнения $x^2 - ax + a+1$ будет наименьшей.

Задача 4.



Дано: ABCD - прямоугольная трапеция.
AC и BD - диагонали.
 $AC \perp BD$, $\frac{BC}{AD} = k$.

Найти: $\frac{BD}{AC}$.

Решение. $\angle BOC = \angle DOA$

1) $\triangle BOC \sim \triangle DOA$ по 2 углам. $\angle BOO = \angle DOO$ (как вертикальные)
 $\angle BCO = \angle DAO$ (как накрест лежащие).

2) Из подобия следует

$$\frac{BC}{AO} = \frac{BO}{DO} = \frac{OC}{AO} = k$$

$$3) AC = AO + OC = AO + k \cdot AO = AO(1+k)$$

$$BD = BO + DO = DO + k \cdot DO = DO(1+k)$$

$$4) \begin{cases} BD = DO(k+1) \\ AC = AO(k+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{DO(k+1)}{AO(k+1)} = \frac{DO}{AO}.$$

Ответ: $\frac{BD}{AC} = \frac{DO}{AO}.$

Ставропольский край
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2020/21 учебного года

Математика

11 класс

1. В трех домах, имеющих разный цвет (красный, жёлтый, белый), живут лица трех национальностей (англичанин, норвежец, испанец), которые выращивают разные цветы (ландыши, сирень, крокусы) и предпочитают разные напитки (сок, вода, молоко). Известно следующее:

- Англичанин живёт в доме красного цвета.
- Норвежец живёт в первом доме слева. ✓
- Крокусы растут в доме жёлтого цвета.
- Человек, выращивающий ландыши, пьёт сок.
- Молоко пьют в среднем доме.
- Белый дом крайний справа. ✓

Что пьёт норвежец? Ответ обоснуйте.

2. Определите последние две цифры числа 2021^{2020} .

3. При каких $a > 0$ сумма кубов корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ будет наименьшей?

4. В прямоугольной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, а отношение оснований равно k . Найти отношение диагоналей трапеции.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S - вершина) проведено сечение плоскостью, проходящей через точки B и C и делящей ребро SA в отношении $m:n$, считая от вершины S . Известно, что объем пирамиды $SABC$ равен V , а расстояние от центра основания ABC до плоскости сечения равно d . Найти площадь сечения.

N2.

$$2021^{2020} = \ast \ast \ast \dots - \textcircled{1}$$

Так как число 2021 оканчивается на 1, а известно, что в какую бы степень не поставили натуральное число, оканчивающееся на 1, последняя цифра будет 1. Пришли к выводу, что последняя цифра будет 1.

Теперь узнаем, какой будет предпоследняя цифра.

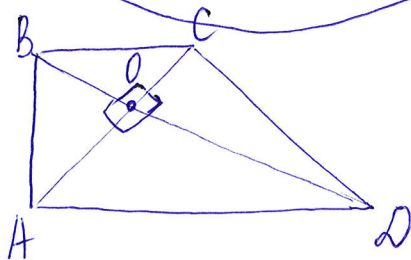
$$101^{100} = 10$$

11¹²

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AO(1+k)}{OD(1+k)} = \frac{AO}{OD}$$

2.

н 4.



Дано: ABCD - прямоугольная трапеция.
AC и BD - диагонали.

$$\frac{BC}{AD} = k, \quad \frac{BC}{AD} = k$$

Найти: $\frac{AC}{BD} = ?$

Решение:

Поскольку ABCD - прямоугольная трапеция, то.

$\triangle BOC \sim \triangle DOA$ по двум углам. $\angle BCO = \angle DAO$ (как накрест лежащие)
 $\angle BOC = \angle DOA$ (как вертикальные)

из подобия следует:

$$\frac{BC}{AO} = \frac{BO}{DO} = \frac{OC}{AO} = k$$

$$AC = AO + OC = AO + k \cdot AO = AO(1+k)$$

$$BD = BO + OD = OD + k \cdot OD = OD(1+k)$$

$$\frac{OC}{AO} = k, \text{ значит } OC = k \cdot AO$$

$$\frac{OB}{DO} = k, \text{ значит } OB = k \cdot DO$$

$$\begin{array}{r} 2021 \\ \times 2021 \\ \hline 2021 \\ + 2042 \\ \hline 4042 \\ \hline 4084441 \\ + 4084441 \\ \hline 8168881 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8168881 \\ + 4084441 \\ \hline 12253321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12253321 \\ + 4084441 \\ \hline 16337761 \end{array}$$

№1.

Построим таблицу.

	аппитанин	поцветеу	испанеу
дом	красный	желтый	белый
цветы	сирень	крокусы	ландыши
напитки	молоко	вода	сок.

Дома

	ант.	кор.	исп.
красный	+	-	-
желтый	-	+	-
белый	-	-	+

цветы

	ант.	кор.	исп.
ландыши	-	-	+
сирень	+	-	-
крокусы	+	+	-

Напитки

	ант.	кор.	исп.
сок	-	-	+
вода	-	+	-
молоко.	+	-	-

ответ: (вода).



N3.

$$x^2 - ax + a + 1 = 0.$$

$$a=1, b=-a, c=a+1$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot (a+1) = a^2 - 4a - 4$$

$$\frac{a + (a^2 - 4a + 4)}{2}$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0.$$

$$a=1, k=-2, c=4.$$

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$D_1 = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$

$$x = -\frac{k}{a}$$

$$x = 2$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

$$(2+2)(2^2 - 2 \cdot 2 + 2^2)$$

$$4(4 - 4 + 4) = 16$$

$$(a+1)(2^2 - (a+1) + 2^2)$$

$$(a+1)(4 - (a+1) + 4)$$

$$(a+1)(a+9) = a^2 + 9a + a + 9 = a^2 + 10a + 9$$

$$a^2$$

$$a=1, k=5, c=9.$$

$$D = 5^2 - 1 \cdot 9 = 25 - 9 = 16, D_1 > 0, \sqrt{D} = 4.$$

$$x_1 = -5 + 4 = -1$$

$$x_2 = -5 - 4 = -9$$

$$a^2 + 8a - 9.$$

$$a=1, k=4, c=-9$$

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$D_1 = 4^2 - 1 \cdot (-9) = 16 + 9 = 25, \sqrt{D_1} = 5.$$

$$x_1 = -4 + 5 = 1$$

$$x_2 = -4 - 5 = -9.$$

уравнение имеет корни, если $D \geq 0$.

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot (a+1) = a^2 - 4a - 4$$

$$a^2 - 4a - 4 \geq 0.$$

$$D = (-2)^2 + 4 = 8, \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$a_1 = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$a_2 = 2 - 2\sqrt{2}$$

Значит уравнение имеет 2 корня для любых

значения a .

По теореме Виета

$$x_1 \cdot x_2 = a + 1$$

$$x_1 + x_2 = a.$$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2) = \\ &= a(a^2 - 3(a+1)) = a(a^2 - 3a - 3) = \\ &= a(a - 1,5 - \frac{3}{4}) \neq. \Rightarrow a = 1. \end{aligned}$$

$$a = 1$$

$$S = 1 \cdot (-0,5) + 1 \cdot (-0,5) = -1$$

$$-0,25 - 0,75$$

Маховой Владислави.

муниципальное бюджетное
общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 10»
Предгорного муниципального района
Ставропольского края

Исеновик

продолжение задачи 1.

4) Обобщающая таблица „Заключение“.

	американец	норвежец	испанец
дом	красный	белый	белый
цветок	сирень	крокус	ландыши
напиток	молоко	вода	сок

Ответ: норвежец пьет воду.

Задача 2.

$$2021^{2020} = * * * \dots \underline{0} \underline{1}$$

Так как число 2021 оканчивается на 1, а известно, что в какую бы степень не поставили натуральное число, оканчивающееся на 1, последняя цифра всегда будет 1.

При n^{n-1} наблюдается закономерность, что последними цифрами является 0 и 1.

Ответ: две последние цифры будут 0 и 1.

Задача 3.

$$x^2 - ax + a + 1 = 0.$$

$$a = 1, b = -a, c = a + 1$$

$$\text{Отсюда следует: } a^2 - 4a + 4 > 0.$$

$$\text{Решим: } a^2 - 4a + 4 = 0.$$

$$a = 1, k = -2, c = 4.$$

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$D_1 = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 0, D_2 = 0.$$

$$x = \frac{-k}{a}$$

$$x = 2.$$

По теореме Виета, ^{получается} $x_1 \cdot x_2 = a + c$

$$\text{Далее } a_1^3 + a_2^3 =$$