Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике
обучающегося 10 **класса**
муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения
«Средняя общеобразовательная школа №2»
Предгорного муниципального района Ставропольского края

Кочанова Даниила Владимировича

ФИО

Учитель: Танарина Ирина Николаевна

ФИО

Дата: 30 ноября 2020 года

№1

$x^2+ax+2a-5=0$

По теореме Виета:

$\begin{cases} x_1x_2=2a-5 \\ x_1+x_2=-a \Rightarrow (x_1+x_2)^2=a^2 \Rightarrow (x_1^2+x_2^2)+2x_1x_2=a^2 \end{cases}$

$x_1x_2=2a-5 \Rightarrow 2x_1x_2=4a-10 \Rightarrow x_1^2+x_2^2=a^2-4a+10$

$f(a)=a^2-4a+10;\ f'(a)=2a-4.$

Найдем точку минимума $f(a)$:

$2a-4=0 \Rightarrow 2(a-2)=0 \Rightarrow a_{min}=2$. т.к. старший коэф. положителен.

Проверим случай, когда наше уравнение не является квадратным:

I. $a=0 \Rightarrow x^2-5=0 \Rightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0;$

$(\sqrt{5})^2+(-\sqrt{5})^2=10$

II. $2a-5=0 \Rightarrow a=2{,}5 \Rightarrow x^2+2{,}5x=0 \Rightarrow x(x+2{,}5)=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-2{,}5 \end{array}\right. \Rightarrow x_1^2+x_2^2=6{,}25$

$f_{min}=2^2-4\cdot 2+10=4-8+10=6$

$6<6{,}25<10 \Rightarrow$ минимальное значение 6 и достигается при $a=2$.

Ответ: 2

№5

$f(x)+xf(1-x)=1$ выполняется для всех x

$\Rightarrow$ и для $1-x$: $f(1-x)+xf(1-(1-x))=1 \Rightarrow f(1-x)+xf(x)=1$

$\begin{cases} f(x)+xf(1-x)=1 \Rightarrow f(1-x)=\frac{1-f(x)}{x} \\ f(1-x)+xf(x)=1 \Rightarrow f(1-x)=1-xf(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{1-f(x)}{x}=1-xf(x)$

$1-f(x)=x-x^2f(x) \Rightarrow x^2f(x)-f(x)=x-1 \Rightarrow f(x)(x^2-1)=x-1 \Rightarrow$

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1};\ 2020f(x)+1=0 \Rightarrow \frac{2020(x-1)}{x^2-1}+1=0 \Rightarrow \frac{2020(x-1)+x^2-1}{x^2-1}=0$

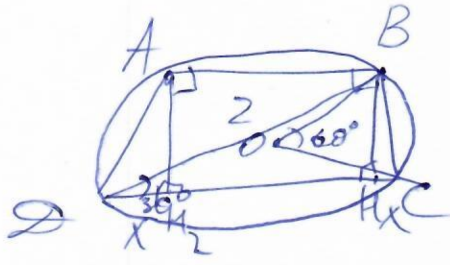
$$\frac{2020(x-1)+(x-1)(x+1)}{x^2-1}=0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+2021)}{x^2-1}=0$$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \text{ — не устраивает, т.к. знаменатель обнуляется.} \\ x=-2021 \end{array}\right.$

Ответ: -2021.

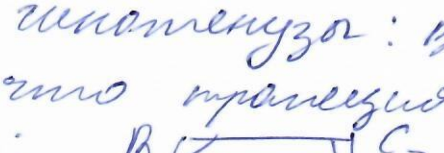
№2

Дано:
$\square ABCD$ трапеция.
$BD=2$;
$\angle BOC=60°$.



$S_{\square ABCD}$ — ?

Решение: $\angle BDC$ опирается на $\breve{BC} \Rightarrow \angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=30°$
Напротив угла в $30°$ лежит катет длиной в половину гипотенузы: $BH=\frac{1}{2}DB=\frac{2}{2}=1$.
Докажем, что трапеция, вписанная в окружность равнобокая:



По свойству трапеции $\angle A_2B_2C_2=180-\varphi$.
По свойству вписанного четырёхугольника противоположные углы в сумме $180° \Rightarrow$
$\angle B_2C_2D_2=180-\varphi \Rightarrow \angle A_2D_2C_2=180-(180-\varphi)=\varphi$
$\Rightarrow$ трапеция равнобокая $\Rightarrow DH_2=CH=x$.
По теореме Пифагора: $DH=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3} \Rightarrow HH_2=\sqrt{3}-x$
$\Rightarrow HH_2+2x=DC=\sqrt{3}+x$. $\square ABHH_2$ — прямоугольник $\Rightarrow$
$AB=H_2H=\sqrt{3}-x$.

$$S_{\square ABCD}=\frac{(AB+DC)}{2}\cdot BH=\frac{\sqrt{3}-x+\sqrt{3}+x}{2}\cdot 1=\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

~~№4~~

~~Заметим, что если Петя~~

№3

Пусть a и b, кол-во чётных и нечётных членов. Тогда:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)d)n}{2} \Rightarrow 2S_n \vdots n \Rightarrow \begin{cases} 154 \vdots (a+b) \\ 33 \vdots b \\ 44 \vdots a \end{cases}$$

Кол-во чётных и нечётных членов чередуются $\Rightarrow b - a \le 1$

Заметим, что под эти условия подходят числа: $\begin{cases} b=3 \\ a=4 \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{(a+b)(2a_1+(a+b-1)d)}{2} = 77 \Rightarrow$

$\Rightarrow 154 = 7(2a_1 + 6d) \Rightarrow (a_1 + 3d) = 11$

$d \not\vdots 2$ т.к. в прогрессии есть и чётные и нечётные члены. $a_1 \in N \Rightarrow a_1 > 0 \Rightarrow 11 - 3d > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=2 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \Rightarrow a_1 = 8 \Rightarrow \text{уд.} \\ d=2 \Rightarrow a_1 + 6 = 11 \Rightarrow a_1 = 5 \not\vdots 2 \Rightarrow \text{не уд.} \end{array}\right.$

Отсюда наша прогрессия имеет вид:

~~{8; 7; 9; 10; 11; 12; 13; 14}~~ 8+0 $\{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$;

$8+10+12+14 = 30+14 = 44$;

$9+11+13 = 33$; $\Rightarrow$ все условия выполняются

Заметим, что ещё нашей системе подходят числа $\begin{cases} a=11 \\ b=11 \end{cases} \Rightarrow n = 22$; $\frac{(2a_1+21d)\cdot 22}{2} = 77 \Rightarrow$

$2a_1 + 21d = 7$; $d \in N \Rightarrow 21d \ge 21 \Rightarrow 2a_1 < 0$ — противоречие.

Ответ: 8 - 1ый член; 14 - последний член; 7 - кол-во.

№4

I Пусть N - число произведения в текущий ход. Тогда игрок точно не выигрывает при:

$\begin{cases} 9N < 2020 \\ 2 \cdot 9 \cdot N > 2020 \end{cases}$ т.к. если он походит, умножив даже на 9, он не превысит 2020, но если он умножит...

на следующий ход ~~при~~ его соперник превысит 2020 умножив на 9.

$$\begin{cases} 9N < 2020 \\ 2\cdot 9N > 2020 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N < \frac{2020}{9} \\ N > \frac{1010}{9} \end{cases}$$ т.к.

$N \in Z$ то $\begin{cases} N \leq 224 \\ N \geq 112 \end{cases}$

III Пусть Петя - будущий победитель, и он назвал первой 8. Докажем, что при любом числе названном Сашей в следующем ходу, Петя сможет получить $N \in [112; 224]$ и гарантированно выиграть.

$8\cdot 2\cdot 9 = 144 \in [112; 224]$ т.е. выиграет Петя назвав 9

$8\cdot 3\cdot 8 = 204 \in [112; 224]$ т.е. Петя назовет 8 и выиграет.

$8\cdot 4\cdot 4 = 128 \in [112; 224] \Rightarrow$ Петя выиграет назвав 4.

$8\cdot 5\cdot 4 = 160 \in [112; 224] \Rightarrow$ Петя назовет 4 и выиграет.

$8\cdot 6\cdot 3 = 144 \in [112; 224] \Rightarrow$ Петя назовет 3 и победит.

$8\cdot 7\cdot 3 = 168 \in [112; 224] \Rightarrow$ Назовет 3 и победит.

$8\cdot 8\cdot 2 = 128 \in [112; 224] \Rightarrow$ Назовет 2 и победит.

$8\cdot 9\cdot 2 = 144 \in [112; 224] \Rightarrow$ Назовет 2 и выиграет.

Было доказано выше, что если игрок получает перед своим ходом $N \in [112; 224]$, то он точно проиграл. Петя способен сделать Саше эту ситуацию при любом выбранном числе см. пункт II. Игра будет проходить так: Петя называет 8, Саша называет A. При любом A Петя делает $N \in [112; 224]$ и оставляет Сашу в проигрышной ситуации, т.к. умножив даже на 9 он получает число меньше 2020 но умножив хотя бы на 2, даёт возможность умножить Пете на 9 и выиграть.

Ответ: Петя, поставив 8 сначала, потом в зависимости от хода Саши второе число (см. III) и поставив 9